REDES DE TUTORÍA

TÍTULO

La familia de los dados

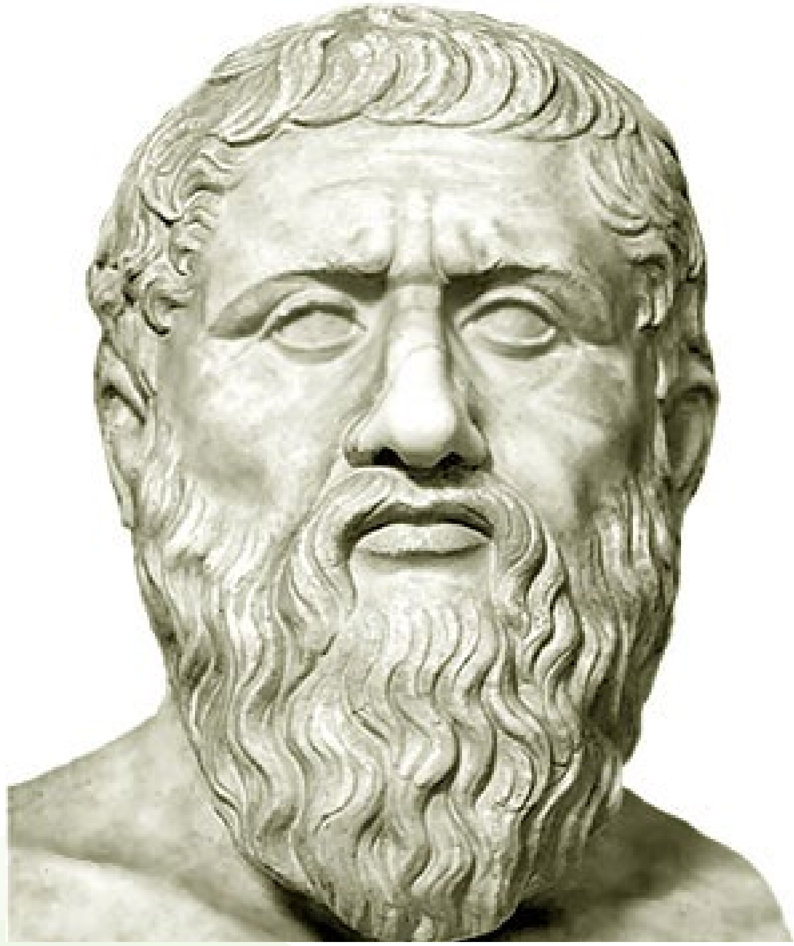
por José Miguel Morales Elox

VIVENCIA

En la vida cotidiana usamos objetos que tienen una forma geométrica sencilla—como una mesa rectangular, una cubeta cilíndrica o un lápiz con forma de prisma hexagonal terminado en una punta cónica. Una pregunta interesante es: ¿por qué tienen esta forma? ¿Cómo contribuye la forma de cada objeto a la función que tiene? ¿En cuáles casos es necesario que tengan esa forma para cumplir su función?

Consideremos otro ejemplo: todos hemos jugado con dados alguna vez. Aunque no tenemos la certeza de ganar--pues de eso se trata un juego de azar—todos los jugadores confiamos en tener el mismo chance de que “la suerte nos sonría”. ¿Cuál es, en este caso, el papel de la forma geométrica del dado?

CONTEXTO



Busto de Platón. Esta pieza data del siglo IV d. C. y es una copia romana de un original griego. Actualmente se encuentra en el Museo Pio-Clementino del Vaticano.

El cubo pertenece a una familia de figuras que han sido estudiadas por la humanidad desde hace al menos 2400 años. Su importancia no radica solamente en que pueden funcionar como dados, sino en razones mucho más fundamentales, que las lecturas de esta unidad comenzarán a mostrarte. La primera persona en escribir sobre las figuras de “la familia del cubo” fue el filósofo griego Platón, quien construyó una de las primeras teorías del Universo basada en las matemáticas. Durante el Renacimiento (hace aprox. 400 años), artistas como Leonardo da Vinci y Alberto Durero describieron y dibujaron estas figuras, mientras que científicos como Johannes Kepler las estudiaron matemáticamente. Desde entonces, “la familia del cubo” ha sido estudiada continuamente por científicos y matemáticos, y ha servido de inspiración a varios artistas.

COMPETENCIAS QUE SE EJERCITAN

- Identificar la relación entre la forma y la función de algunos objetos de uso cotidiano.
- Identificar las características geométricas de figuras planas y sólidas, clasificar ambos tipos de figuras de acuerdo con sus características.

MATERIAL

Polígonos regulares cortados en papel cascarón o cartón, al menos:
32 triángulos,
6 cuadrados,
12 pentágonos,
12 hexágonos,
12 heptágonos y
12 octágonos
(Las plantillas para cortarlos se agregarán en un Apéndice.)

Dado romano de hueso

Tel. (55) 5207-4543 contacto@redesdetutoria.com www.redesdetutoria.com

DESAFÍO

En la Vivencia mencionamos que algunos objetos cotidianos tienen una forma geométrica que contribuye o aun define su uso. (Encuentra al menos tres ejemplos.) **¿Crees que esto pase con los dados?**
Algunos estudiantes, al comenzar a este desafío, se dan cuenta de que para ellos ‘cubo’ y ‘dado’ son sinónimos. **¿Crees que esto sea verdad? ¿Qué entiendes por cada uno?**
Después de explorar estas preguntas introductorias, estás listo para enfrentar la pregunta central de este desafío:

Además del cubo, **¿habrá otras figuras que puedan funcionar como dados?**

En el Apéndice hemos incluido plantillas para recortar triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares y hexágonos regulares. (**¿Por qué hemos escogido estas figuras?**) Utilizando ese material, intenta construir todos los “dados alternativos” que puedas. Paralelamente, te invitamos a responder la siguiente pregunta:

¿Qué características geométricas comparten las figuras que son candidatos a ser dados, y que las diferencian de otras figuras sólidas?

PREGUNTAS QUE PUEDE SER ÚTIL EXPLORAR

¿Por qué es que—como mencionamos en la Vivencia—confiamos en que los dados que usamos no darán ventaja a ningún jugador? ¿Sabes lo que es un 'dado cargado'?

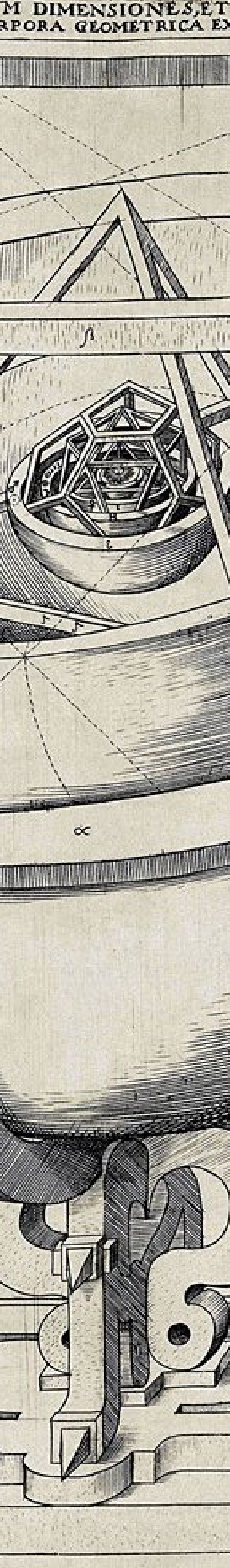
¿Cuáles son las características geométricas del cubo? ¿En qué manera estas características del dado contribuyen a su uso como dado?

LECTURAS

En el Desafío, estudiaste los poliedros regulares—el "nombre científico" de los dados--de forma matemática. A continuación, te mostramos tres lecturas que muestran distintas perspectivas sobre estos cuerpos y sobre el papel que han jugado en distintos campos del pensamiento humano, dentro y fuera de las matemáticas. Para cada lectura, brindamos una pequeña introducción como guía para que puedas escoger aquello que te interesa y con lo que te gustaría comprometerte.

LA FAMILIA DE LOS DADOS O SÓLIDOS PLATÓNICOS

Una vez que estés seguro en tu solución al desafío o hayas agotado tu interés, te sugerimos corroborar tus resultados con el siguiente material, que es una selección del fascículo "Los sólidos platónicos" de Carlos Quesada.



Los sólidos platónicos (fragmento) por Carlos Quesada

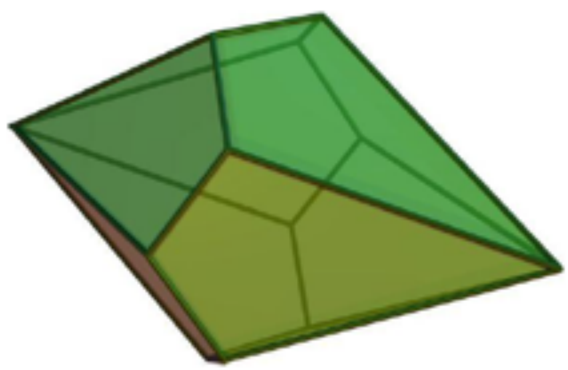
INTRODUCCIÓN
En muchas ocasiones un objeto complejo e importante en el mundo de las matemáticas traspasa las fronteras de la misma, siendo conocido por personas ajenas a esta disciplina. Es el caso de los sólidos platónicos.

Cinco poliedros -el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro - tienen unas determinadas propiedades que los hacen especialmente interesantes y bonitos. Tal vez no todo el mundo sabría decir a priori cuales son los sólidos platónicos, y menos aún dar una definición, pero sin duda los reconocerían, si los tuvieran delante.
[…]

Kepler los utilizó para presentar su modelo del sistema cosmológico.

DEFINICIÓN DE SÓLIDO PLATÓNICO

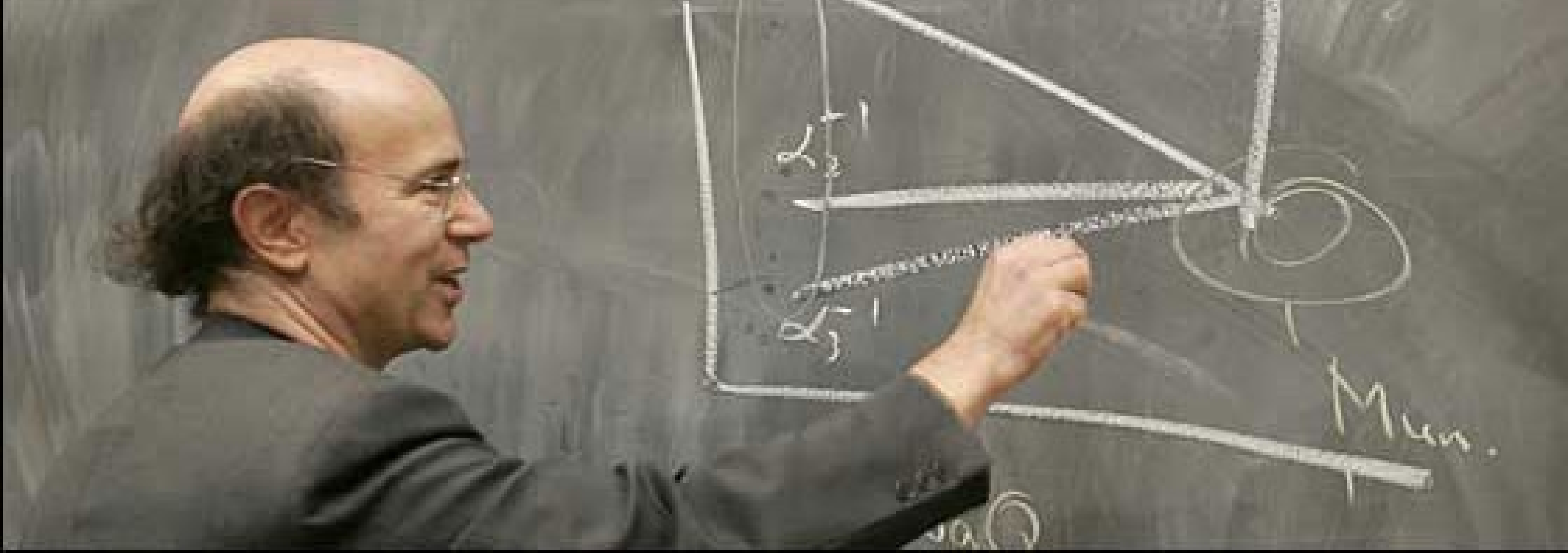
Hemos hablado ya bastante sobre los sólidos platónicos y podemos identificarlos perfectamente, pero aún no tenemos una definición precisa de lo que es un sólido platónico. Vemos ciertas características comunes, como que cada uno de los sólidos solo tiene un tipo de polígono como cara, que todas están dispuestas "uniformemente"… Así pues, de entre todos los poliedros que nos podamos imaginar, se dice por definición que un sólido platónico es un poliedro regular. El nombre por lo pronto hace honor a la idea que tenemos de un sólido platónico. Para entender de manera exacta que es la regularidad en el espacio recordemos la definición en el plano. En dos dimensiones los polígonos son regulares si todos sus ángulos son iguales entre sí y todos sus lados son también iguales entre sí. El equivalente a esta segunda condición en el espacio sería que todas las caras del poliedro regular sean iguales entre sí. Además, en el plano todos los polígonos regulares son convexos, propiedad que debemos imponer en tres dimensiones, ya que en principio un poliedro podría no ser no convexo (de hecho veremos más adelante que éstos son los sólidos de Kepler). Pero esto no es suficiente para nuestra idea de regularidad, no es muy difícil imaginar un poliedro convexo formado exclusivamente a base de romboides, y es improbable que alguien pudiera considerarlo regular.



Así pues necesitamos una condición un poco más fuerte, imponemos que los polígonos además de iguales entre sí, sean regulares. En cuanto a la condición sobre la regularidad de los vértices, encontramos que en los poliedros no existe una definición natural de ángulo. La idea intuitiva es que todos los vértices han de ser iguales. Esto se cumple cuando cada vértice está rodeado por las mismas caras, ordenadas de la misma manera. Ni que decir tiene que esto se cumple en los sólidos platónicos, pues todas las caras son iguales, lo que implica que la sucesión de las mismas es invariante. Si un poliedro tiene todos sus vértices iguales entre sí se dice que es de vértices uniformes. Formalmente se define también un poliedro de vértices uniformes como aquel que para cada par de vértices existe una simetría del poliedro que transforma el uno en el otro isométricamente. Sabiendo ya como identificar si dos vértices son iguales, podemos llegar a la definición final. Un poliedro regular es todo aquel poliedro convexo cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí, y cuyos vértices son iguales.

Los poliedros regulares en el pensamiento científico de Platón

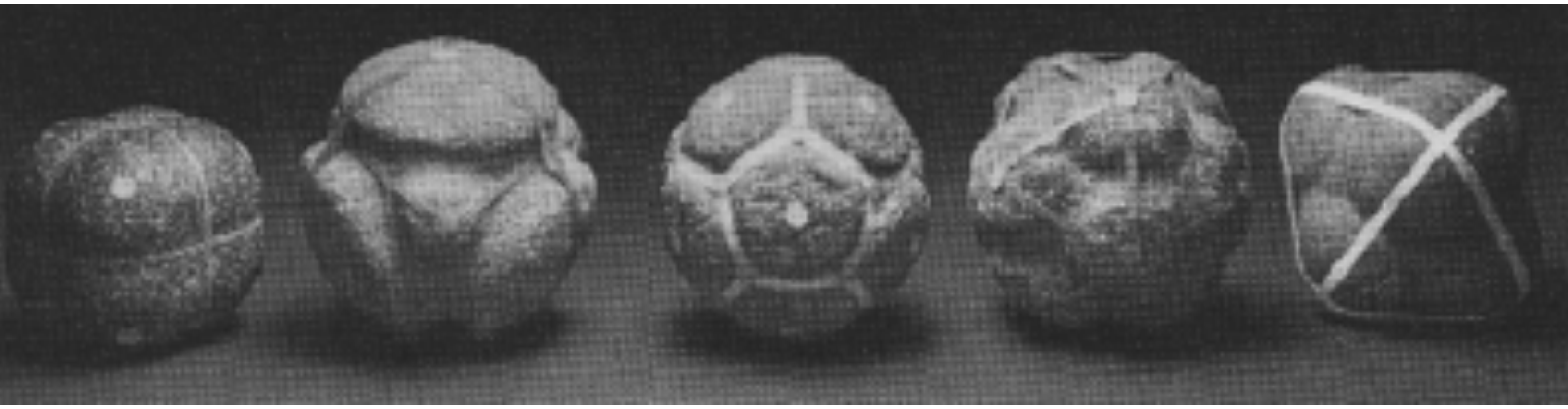
En la sección Contexto mencionamos que el filósofo griego Platón fue el primero en estudiar las figuras del desafío anterior, razón por la cual se conocen hasta hoy en día como "sólidos platónicos". En esta lectura, el autor nos cuenta que Platón estaba tan fascinado con estas figuras que construyó una teoría que explicaba la naturaleza con base en ellas. Un primer reto de lectura será responder las siguientes preguntas: **¿qué teorías tenemos actualmente para explicar la naturaleza? ¿Cuál era la teoría de Platón? ¿Qué relación tiene la teoría de Platón con las teorías científicas modernas? ¿Cuáles son sus similitudes y diferencias?**



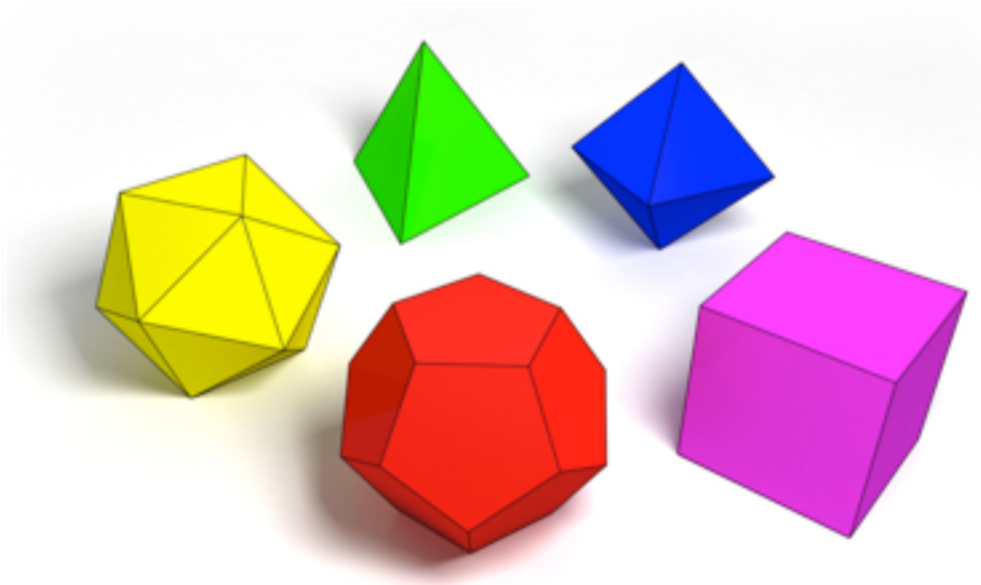
Bellos Perdedores: la Geometría Platónica de los Elementos

Por Frank Wilczek

Platón creía ser capaz de describir el Universo usando cinco formas sencillas. Estas formas, llamadas los sólidos platónicos, no fueron inventadas por Platón. De hecho, son miles de años más antiguas que él; podemos encontrar modelos de piedra (¿dados, quizá?) de cada uno de los sólidos platónicos en el Museo Ashmolean de Oxford que datan aproximadamente al año 2000 a. C., como se muestra abajo. Pero Platón convirtió estos sólidos en el núcleo de una visión del mundo físico que vincula lo ideal con lo real, y el microcosmos con el macrocosmos, de una manera original y verdaderamente notable.



Permítanme explicar, en primer lugar, qué son los sólidos platónicos. Para comenzar, consideremos algo más sencillo: los polígonos regulares. Por definición, estos son figuras bidimensionales encerradas por lados de la misma longitud, que forman siempre el mismo ángulo con sus lados vecinos. Los triángulos equiláteros, los cuadrados, los pentágonos regulares, etc. son ejemplos de polígonos regulares. Los sólidos platónicos son el análogo tridimensional de los polígonos regulares, y resultan ser mucho más interesantes. Los sólidos platónicos están encerrados por polígonos regulares, todos del mismo tamaño y la misma forma. Se puede demostrar matemáticamente que hay exactamente cinco sólidos platónicos. Son los siguientes:



El tetraedro tiene cuatro caras triangulares, el cubo seis caras cuadradas, el octaedro ocho caras triangulares, el dodecaedro doce caras pentagonales, y el icosaedro veinte caras triangulares. Platón propuso que cuatro de estos sólidos formaban los Cuatro Elementos: los tetraedros, con sus vértices afilados, nos dan el picor del Fuego; los octaedros, que se deslizan fácilmente, nos dan la volatilidad del Aire; los icosaedros, parecidos a gotas pequeñas, nos dan el Agua, y los cubos, macizos y apilables, nos dan la Tierra. Finalmente, el dodecadro es la forma del Universo en su conjunto. Más tarde, Aristóteles enmendó el sistema de Platón, y sugirió que el dodecaedro representaba una quinta esencia—el Éter que llena el espacio.

Las ideas de Platón brindaron dignidad y grandeza al estudio de la geometría y estimularon fuertemente su desarrollo. El treceavo y último libro de los Elementos de Euclides, obra que representa la gran síntesis de la geometría griega y que es primer libro de matemáticas axiomáticas, culmina con la construcción de los cinco sólidos platónicos y una demostración de que son los únicos posibles. Los estudiosos creen que Euclides planeó desde el inicio darle ese clímax a los Elementos.

Desde luego, visto desde una perspectiva científica moderna, el salto que hace Platón de los ideales matemáticos a la realidad física parece un error garrafal. Los cuatro (o cinco) “elementos” de la antigüedad no son sustancias simples, y no se pueden utilizar como bloques para construir el mundo material. El actual análisis de la materia, que ha resultado tan rico y exitoso, se hace a partir de conceptos completamente diferentes. Y, sin embargo…

El enfoque y la ambición de la teoría de Platón, por terriblemente errada que ésta sea, anticipó el espíritu de la física teórica moderna. Su intención de describir el mundo material mediante el análisis (“reducción”) de unas cuantas sustancias atómicas, cada una con propiedades sencillas, las cuales existen en un gran número de copias idénticas, coincide con la visión moderna.

Aún más profunda es su idea de que la simetría define la estructura. Platón intuyó un enorme poder en el hecho de que, si pedimos simetría perfecta, encontramos un número pequeño de estructuras posibles. Con base en esto y en algunas pistas tomadas de la experiencia, Platón hizo que la extravagante síntesis que sugería su filosofía—construir el Mundo a partir de las Ideas—pareciera posible. Las pistas estaban frente a los ojos: la casi coincidencia entre el número de sólidos perfectos (cinco) y el número tentativo de elementos (cuatro); el hecho de que las formas de los sólidos pudieran explicar las cualidades observadas (por ejemplo, los afilados vértices del tetraedro para el picor del fuego). También resulta admirable la audacia del ingenio de ver un defecto aparente en la teoría—cinco sólidos para cuatro elementos—como una oportunidad para coronar la creación, ya sea con el Universo en su conjunto (Platón) o con el espacio en sí (Aristóteles).

Cuando los físicos modernos intentan explicar con ecuaciones las leyes novedosas del microcosmos, deben sacar conclusiones con base en su intuición y en información incompleta. De forma optimista y a falta de alternativas constructivas, se han dejado guiar, al igual que Platón, por la simetría. Quizás la simetría en ecuaciones resulte una idea menos familiar que la simetría en las formas, pero no tiene nada de místico o misterioso. Decimos que una ecuación, al igual que una figura, muestra simetría, cuando podemos hacerle cambios que no la cambian. Así, por ejemplo, la ecuación

$X=Y$

muestra una bonita simetría porque, si intercambiamos la X y la Y, se transforma en:

$Y=X$

y esta ecuación transformada expresa exactamente lo mismo que la original. Por otro lado, la ecuación $X=Y+2$ se transforma en $Y=X+2$, que expresa algo completamente diferente. Como muestra este ejemplo de kínder, las ecuaciones simétricas pueden ser especiales y poco comunes, incluso cuando la simetría involucra transformaciones muy sencillas.

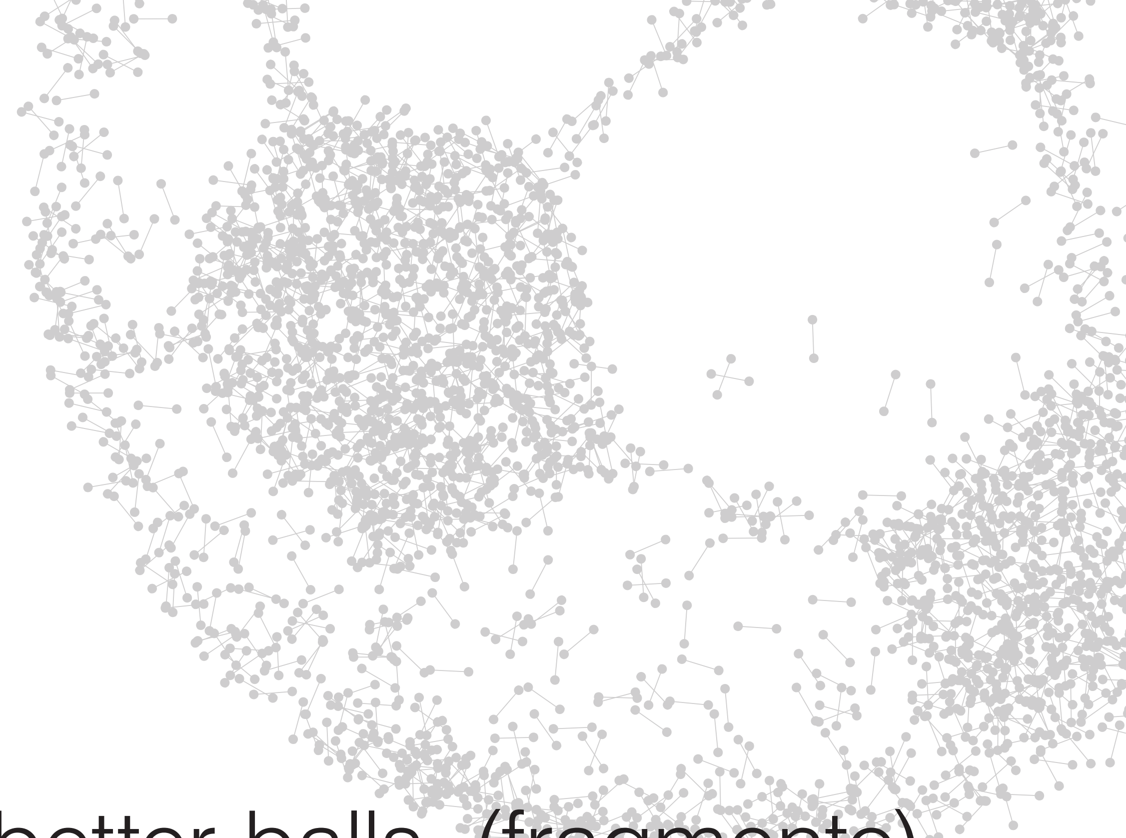
Las ecuaciones que interesan a los físicos son considerablemente más ricas, desde luego, y los cambios que esperamos que “no las cambien” son mucho más extensos y elaborados. Pero la inspiración central sigue siendo, tal como para Platón, la esperanza de que la simetría defina unas cuantas estructuras interesantes, y que la naturaleza escoja una (¡o todas!) de entre estas posibilidades más bellas.

El Bello Perdedor de Platón fue, en retrospectiva, un producto de la ambición prematura e inmadura. Él trató de hacer el brinco directamente de unas matemáticas bellas, una numerología imaginativa y algunas observaciones primitivas y parciales, a una Teoría del Todo. En este sentido, su ambición fue prematura. Además, Platón olvidó sacar consecuencias específicas de sus ideas y probarlas críticamente. Hizo un modelo del mundo, pero se contentó con “declararse victorioso” antes de pelear ninguna batalla. La forma madura y crítica de la ambición científica, que aspira a entender características específicas del mundo de forma detallada y precisa, tardó muchos siglos más en surgir.

Los poliedros semirregulares y la fabricación de balones de futbol

Platón consideraba que el agua se compone de icosaedros. Entre sus argumentos, mencionaba que este sólido, con sus veinte triángulos equiláteros, es el que rueda más fácilmente de los cinco sólidos regulares. Muchos cientos de años después de Platón, y en muchos lugares del mundo, la gente comenzó a fabricar pelotas para jugar. En nuestra cultura occidental, el futbol se volvió uno de los deportes más populares y requirió del diseño de balones apropiados para el juego. La siguiente imagen muestra los balones que han sido utilizados en las Copas del Mundo desde 1930.

Nota que, entre 1970 y 2002, el diseño del balón fue esencialmente el mismo. ¿Cómo describirías—ge-ométricamente--este diseño? ¿Por qué crees que alcanzó tanta popularidad? En la siguiente lectura encontrarás respuestas tentativas a esas preguntas.



Building better balls (fragmento)

por los columnistas deThe Economist

Adidas has been making FIFA's World Cup balls for four decades, since it developed the Telstar for the 1970 tournament in Mexico. The Telstar's design became the archetypal, iconic soccer ball: a sphere out of 32 hexagons and pentagons, the roundest ball possible at the time. The Telstar's alternating black and white panels created great visual contrast on the televisions of the day, improving the eye's ability to see and track the ball even when it was only a few pixels on a screen.

The Telstar's large number of leather panels created an aerodynamically uniform surface, which made it fly true when launched. The many hand-stitched seams turned out to be a problem, though. Seams are stiff, and create corners; kicking one produces different results than kicking a panel, and if a player's boot catches a corner at an imperfect angle, it affects the ball's trajectory. The seams' threads also absorb water and provide an entry point for the leather to do the same, making the ball heavier and much less responsive as play continues. Finally, hand-stitching makes each ball different. A typical match uses 8-10 balls, and having a ball's behaviour change multiple times during the game, however subtly, is unhelpful.

The next three decades of World Cup balls offered incremental improvements on the Telstar design. The 32-panel approach proved aerodynamically hard to beat, but leather gave way to various foams and plastics. These were better able to stay curved (making a rounder ball) and absorbed less water along the edges. Ball performance -- how it bounces off of boots, the ground, heads and bodies -- improved all along, as did flight performance.

Caminos para seguir profundizando en el tema, de acuerdo con el interés personal

A CONTINUACIÓN, TE PRESENTAMOS ALGUNOS RECURSOS QUE PUEDES UTILIZAR PARA SEGUIR APRENDIENDO SOBRE EL TEMA DE LOS SÓLIDOS PLATÓNICOS O POLIEDROS REGULARES. LOS QUE APARECEN CON HIPERVÍNCULO SON PÁGINAS WEB, LOS DEMÁS SON DOCUMENTOS ELECTRÓNICOS Y ESTÁN RECOPILADOS EN UN PDF ADJUNTO.

"POLIEDROS" POR PETER CROMWELL

En el Desafío introductorio, presentamos la búsqueda de los poliedros regulares mediante la pregunta: "además del cubo, ¿habrá otras figuras que puedan funcionar como dados justos?" Sin embargo, históricamente, el asunto fue mucho más complicado. Si te interesa conocer las dificultades que encontraron los matemáticos para encontrar y aislar los cinco poliedros regulares, puedes leer la sección "The discovery of regular polyhedra" ("El descubrimiento de los poliedros regulares"), pp. 70-74 del libro de Cromwell. Si quieres conocer la definición de sólido regular dada por Euclides en los Elementos y porqué es necesario pulirla, lee la sección "What is regularity?" ("¿Qué es la regularidad?"), pp. 74-78 del mismo libro. También puedes encontrar información semejante en este video de youtube. el texto y el video están en inglés.

"Investigadores de Princeton resuelven el problema de llenar el espacio—sin cubos" por Gale Scott

En la actualidad, 2400 años después de Platón, los poliedros regulares siguen siendo estudiados por los científicos. Uno de los problemas que intentan resolver es cómo acomodar sólidos de forma que llenen el espacio sin dejar huecos--tal como se puede hacer apilando cubos cara a cara. Este artículo, publicado en 2011, reporta el descubrimiento de una nueva solución al problema. El material está en inglés.

"Los sólidos platónicos" por Carlos Quesada

De este fascículo hemos ya presentado la sección en la que se definen los poliedros regulares (ver Desafío introductorio). Pero el texto aborda también el tema de los sólidos platónicos desde el punto de vista del arte. Si te interesa conocer cómo los poliedros regulares y semi-regulares han inspirado la creación de los artistas desde el Renacimiento hasta los tiempos modernos, te invitamos a leer la sección "Los sólidos en la naturaleza, tecnología y arte" (pp. 20-28) de este fascículo. El material está en español.

“La música de las esferas--traditio y el canon astronómico-musical de Kepler” de J. Rafael Martínez R.,

Johannes Kepler, un científico alemán que vivió a inicios de los años 1600’s, es considerado uno de los fundadores de la astronomía moderna. Sus tres leyes del movimiento planetario—conocidas hoy como “Leyes de Kepler”--se aprenden todavía en las universidades y se utilizan para hacer cálculos astronómicos. Pero, en vida, Kepler creyó que su aportación más importante a la ciencia era su teoría del Sistema Solar basada en los cinco sólidos platónicos. Si te interesa conocer esa teoría, te invitamos a leer la sección “Kepler y la geometría secreta del cosmos” (pp. 6-8) de este artículo. Se aborda también el papel de la música en el modelo de Kepler del cosmos (de ahí el título “La música de las esferas…”). El artículo requiere una lectura detenida y quizás la consulta de más fuentes para clarificar cosas que el autor da por hecho. También puedes consultar el inicio del capítulo 4 “Fantasy, Harmony and Uniformity” (“Fantasía, armonía y uniformidad”), pp. 139-149 del libro de Cromwell. Las imágenes en este libro son muy iluminadoras. Carl Sagan, finado astrónomo y divulgador de la ciencia, le dedica a Kepler el tercer capítulo-- titulado “La Armonía de los Mundos”-- de su magnífica serie “Cosmos: un viaje personal”. Ambos, el artículo y el documental, están en español.

REFERENCIAS

1 Fuente: http://lya.fciencias.unam.mx/gfgf/ga20132/poliedros/arch5.pdf
2 Fuente: http://www.pbs.org/wgbh/nova/blogs/physics/2011/12/beautiful-losers-platos-geometry-of-elements/
3 Fuente: http://www.economist.com/blogs/babbage/2010/06/world_cup_ball

ILUSTRACIONES Y FOTOGRAFÍA

http://www.todocoleccion.net/antiguedades/dado-romano-hueso~x52491178
http://img07.deviantart.net/2b1c/i/2006/153/3/a/soccer_ball_by_sandw45.png
https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/fotos/platon_2.jpg

REDES
DE TUTORÍA

Av Oaxaca 96, Roma Nte., 06700
Ciudad de México, Mx.

Teléfono: (55) 5207-4543
Email: contacto@redesdetutoria.com
website: redesdetutoria.com