NÚMEROS RACIONALES

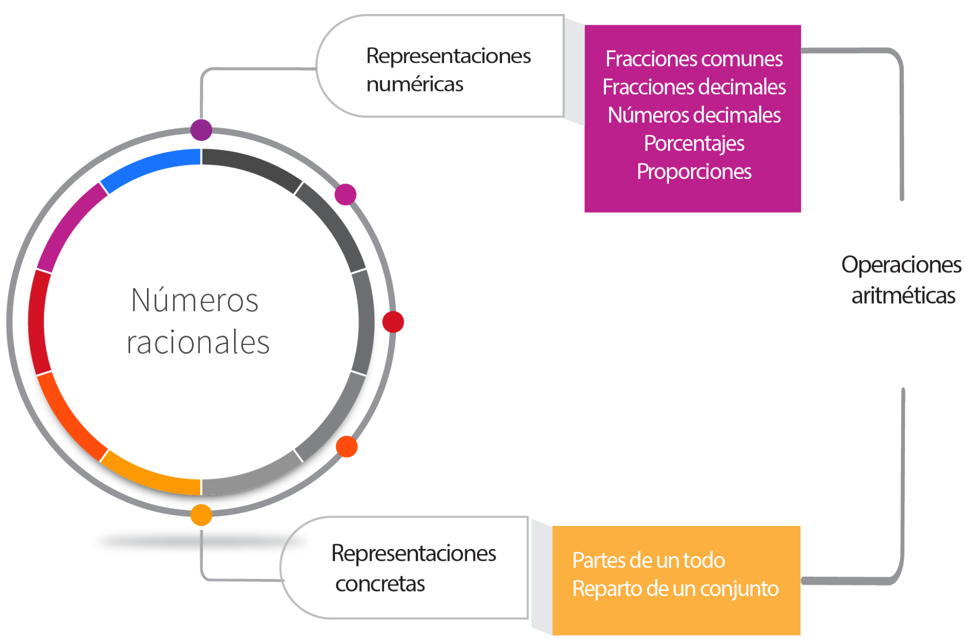
Presentación

Medir nuestra estatura, pesar los ingredientes para hacer una receta, tomar el tiempo que tardamos en completar un viaje. Para todos estos tipos de mediciones existe un instrumento calibrado y una unidad que se usa como la base--metros en el caso de la estatura, kilogramos en el caso de los ingredientes, horas en el caso de la duración del viaje. Pero, a menudo, para obtener la precisión necesaria en nuestra medición, es necesario dividir esas unidades básicas. Por ejemplo, nuestra estatura no es un número entero de metros, por lo cual es común hacer la medición con reglas graduadas en centímetros- es decir, metros partidos en cien. Otro tanto ocurre con los kilogramos y las horas - es necesario dividirlos si queremos hacer mediciones confiables en situaciones cotidianas, y aún más si se trata de situaciones en la industria o la ciencia.

Las personas han hecho mediciones y cálculos con números que no son exactamente un entero - llamados comúnmente fracciones o quebrados - desde hace aprox. 4000 años. Desde entonces, la Humanidad ha buscado formas cada vez más eficientes de hacer cálculos con las fracciones, un proceso que ha llevado miles de años. Los números decimales, por ejemplo, son hoy en día una herramienta indispensable para los cálculos en la industria, la técnica y la ciencia. Su invención ocurrió a finales de los años 1500, es decir, aproximadamente 2500 años después de que la gente usó fracciones por primera vez.

A la par de encontrar procedimientos cada vez más eficaces para hacer las operaciones, los matemáticos han inventado varias formas de representar cantidades no enteras. Hoy en día, además de las fracciones comunes, se utilizan las fracciones decimales, los números decimales y los porcentajes. Todos estos números forman una familia llamada los números racionales, que son el tema de esta Unidad.

Esquema del tema



Propósito general

Esta Unidad presenta varios problemas que no tienen una forma obvia de resolverlos. Algunos incluyen preguntas abiertas, de forma que cada estudiante podrá tomar su propio camino y llegar a su propia solución. Nuestra intención es que la resolución de estos problemas sea una oportunidad para que el estudiante ponga en juego su creatividad natural, para que encuentre sus propios caminos y se plantee sus propias preguntas. Dado que distintos estudiantes llegarán a distintas conclusiones, será necesario entrar en diálogo para compartir nuestras conclusiones y conocer las de los demás. En este proceso compartido de resolución de problemas, los estudiantes construirán una comprensión de los números, en vez de sólo aprender formas mecánicas de hacer operaciones con ellos.

Propósitos específicos

Conocer varias representaciones gráficas y numéricas de las fracciones y los decimales, y utilizarlas en el proceso de resolución de problemas.

Desarrollar y comprender procedimientos para realizar las operaciones aritméticas básicas con números racionales.

Apreciar la contribución de los números racionales para resolver problemas en campos distintos de las matemáticas.

DESAFÍO 1

PARTES IGUALES

Abajo aparecen tres figuras, un triángulo equilátero, un cuadrado y un círculo, que han sido divididas en dos partes iguales.

¿Puedes inventar otras formas de dividir esas figuras en dos partes iguales?

Prueba también a dividir las mismas figuras en 3, 4, 5 o 6 partes iguales. De cuántas formas es posible hacerlo para cada figura?

Organiza y registra lo que comprendiste

Inventa otras figuras y prueba si es posible dividirlas en 2, 3, 4, 5, o 6 partes iguales.

Cuáles figuras pueden dividirse en todos esos números de partes iguales?

DESAFÍO 2
MEDIR SIN REGLA NI METRO

Supongamos que tenemos que envolver con cuerda tres cajas de diferente tamaño. Para ello, tenemos disponibles trozos de cuerda de las siguientes medidas: $\frac{2}{3}$ de metro, $\frac{1}{2}$ metro, $\frac{3}{4}$ de metro. Cuál trozo es el más grande y cuál el más corto? Supongamos además que sólo nos quedan trozos de cuerda del tamaño más grande, y que tenemos instrumentos para cortar pero no para medir.
En esta situación, cómo podemos hacer para obtener trozos del tamaño mediano
y del tamaño pequeño?
Cómo se puede expresar numéricamente la transformación de los trozos de cuerda?

Organiza y registra lo que comprendiste
Qué otros tamaños de cuerda pueden obtenerse a partir del trozo grande de cuerda? Hay algunos tamaños que no sea posible obtener?

DESAFÍO 3
LA “SUMA INGENUA”

Un error común al sumar fracciones (digamos 5/3 + 4/7) es simplemente sumar numerador con numerador y denominador con denominador (en este caso (5+4)/ (3+7) = 9/10). Niños y adultos por igual recurren a veces a este método, pero el resultado no es la suma correcta (verifícalo con el ejemplo dado, o construye tus propios ejemplos para convencerte de esto.)
Por qué no funciona este “procedimiento ingenuo” para sumar?
Cuáles formas correctas de obtener la suma conocen tú y tus compañeros, y por qué funciona cada una?
Organiza y registra lo que comprendiste
El resultado que se obtiene mediante el procedimiento ingenuo, es mayor o menor que la suma verdadera?

Desafío 4
Comparación de fracciones

Si tenemos dos números enteros, como 123 y 321, no es muy difícil saber cuál de ellos es el mayor (inventa otras parejas de números y cuestiónate qué tan difícil resulta identificar el mayor). ¿Qué ocurre con las fracciones? ¿Qué tan fácil o difícil es encontrar la mayor de dos fracciones dadas?

En cada una de estas parejas de fracciones, encuentra la más grande:
a) 10001/10002 y 100001/100002; b) 12345/54321 y 12346/54322.
¿Puedes hacer las comparaciones sin usar números decimales?

Organiza y registra lo que comprendiste
Inventa otras parejas de fracciones y encuentra la mayor de cada pareja.

¿Puedes encontrar casos en los que la comparación se pueda hacer sin realizar operaciones?

DESAFÍO 5
USO DE NÚMEROS DECIMALES PARA SIMPLIFICAR LOS CÁLCULOS

Contexto
La siguiente lectura introduce los llamados "números decimales". Los autores comienzan argumentando que los quebrados (o fracciones) simples pueden resultar incómodos para hacer cálculos. ¿En tu experiencia, te parece que esto es cierto? ¿Qué aspectos del cálculo con fracciones consideras que son incómodos? Después, los autores afirman que es posible realizar los cálculos con mayor facilidad si, en vez de las fracciones, utilizamos los números decimales, e ilustran este punto con varios ejemplos.

Desafío
Para comprender a fondo el texto, proponemos la siguiente pregunta guía:

¿Cuál es la relación entre los quebrados o fracciones y los números decimales?

MEDICIÓN CON NÚMEROS DECIMALES: SIMON STEVIN[1]

Hasta ahora[2] hemos empleado los quebrados simples para la medición y hemos tenido dificultades para calcular con ellos. Pero también al comparar los resultados de la medición los quebrados simples tienen un lado incómodo. Quién puede indicar, sin cálculo, cuál es la mayor de las dos longitudes de 27/49 y 35/58 metros?

Con los números decimales no ocurre lo mismo. La comparación de las magnitudes se efectúa "a ojo": 2.344 m es más que 2.338 m. Esto puede verse por la segunda cifra después del punto.

El cálculo se efectúa observando las reglas más sencillas del punto, lo mismo que con números naturales.

Estas ventajas se obtienen mediante una drástica reducción del empleo de los quebrados ordinarios, es decir, se calcula con relativamente pocos quebrados debidamente seleccionados. La selección se efectúa de modo que sean suficientes los algoritmos de los ábacos.

Por la medición se ve claramente cómo se pueden eliminar los quebrados molestos. Todos conocemos la moderna solución de Simon Stevin, que después de la revolución francesa se ha impuesto en todo el mundo (el mundo anglosajón está actualmente en vías de adoptar la solución de Stevin).

En el caso de la medición de longitudes, la solución consiste en aglutinar unas con otras las distintas unidades de medida de los diferentes campos, tal como el astronómico, geográfico, catastral, atómico, y otros, subiendo o bajando un orden decimal a partir de una medida básica, que es el metro. Para medir longitudes más pequeñas o más grandes se emplean sólo fracciones decimales o múltiplos:

1 Fuente: Otte et. al. Matemáticas, Ed. Desclé de Brouwer, Bilbao, 1985, pp. 69-73
2 Se refiere a las secciones previas del libro.

1/1000 km = 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

Si, por ejemplo, un albañil tiene que trabajar hasta centésimas de metro, entonces empleará el centímetro como unidad de medida. La longitud 89/100 m, entendida como quebrado de acuerdo con la medida básica, se expresa como número natural en la fracción decimal: 89 cm.

Existen algunas dificultades en esta selección de las unidades inferiores. Las fracciones muy simples, tal como 2/3 m, y sobre todo las fracciones “curvas” como 2/11 m, no se pueden expresar en el orden decimal seleccionado, ya que producen números decimales periódicos y continuos:

2/3 m= 0.6666666… m;
2/11 m = 0.18181818… m.

Con los números decimales “infinitamente largos” se entra rápidamente en el campo de los problemas que son propios de la teoría de números, e incluso de aquellos que hasta ahora no se han resuelto a pesar de los muchos esfuerzos realizados (por ejemplo el problema de “la máxima longitud del periodo”). No obstante, para cálculos no muy exactos se puede prescindir de los decimales continuos “teóricos”. Bastan con las aproximaciones según las necesidades. Nuestro albañil hace los cálculos simplemente con 67 cm, y en algún caso excepcional con 667 mm, ya que no tiene ningún sentido obtener cifras más exactas.

Una chimenea rectangular con las medidas interiores de 5/6 m y 1+1/8 m, construida de acuerdo con las anteriores normas “teóricas”, tiene una sección transversal de (5/6)x(1+1/8) m^2.

El engorroso cálculo de quebrados puede evitarse fácilmente. Se emplea la pequeña unidad de medida centímetro en la que se expresan las longitudes en números enteros, aunque sólo sea aproximadamente

5/6 m = (5m)/6 = (500 cm)/6 = 83 cm
1 ⅛ m = (9 m)/8 = (900 cm)/8 = 113 cm

Por tanto, la sección de la chimenea está dada aproximadamente por 83 x 113 cm^2 = 9 379 cm^2.

No se necesitan las complicadas reglas de cálculo de quebrados debido al empleo de la sencilla cantidad escalonada de fracciones decimales (con los denominadores 1, 10, 100, 1000, etc.). Sin embargo, para las fracciones no decimales cuyo denominador contiene, después de simplificar, por lo menos un divisor distinto de 2 o 5 (por ejemplo 8/30 = 2/15 = (2/3)x5), este sistema tiene bastante con aproximaciones decimales adecuadas, de tal modo que no se nota ninguna deficiencia, principalmente en trabajos artesanales. En cambio, para el uso técnico-científico no bastan los quebrados ordinarios; sólo con el conjunto de los números reales se pueden expresar totalmente los problemas de la medición en dicho campo.

Ordena y registra lo que comprendiste

Por qué crees que, cuando hablan del cálculo con quebrados o fracciones, los autores utilicen los adjetivos “incómodo”, “molesto”, y “engorroso”? Da ejemplos de

tu experiencia para justificar tu respuesta.
Estás de acuerdo en que los números decimales hacen más sencillo el cálculo que las fracciones?

Los autores afirman que, si “seleccionamos debidamente unos cuantos quebrados”, entonces es posible hacer todos los cálculos usando sólo los algoritmos de los ábacos.
Cuáles son los algoritmos de los ábacos, y cuáles son los quebrados que se seleccionan para hacer los cálculos con dichos algoritmos?

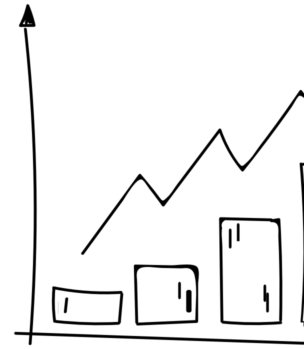
Los autores afirman que, para usar los números decimales en la medición de longitudes, es necesario “aglutinar las distintas unidades de medida de los diferentes campos, tal como el astronómico, geográfico, catastral, atómico, y otros, subiendo o bajando un orden decimal a partir de una medida básica, que es el metro.”
Qué cosas se miden en cada uno de esos campos? Qué significa “subir o bajar un orden decimal a partir de una medida básica”? Si en vez de medir la longitud queremos medir el peso, cuál es la medida básica que debemos utilizar? Cuáles son las medidas que surgen si subimos o bajamos un orden decimal a esa medida básica? En qué campos (científico, industrial, comercial, doméstico) se utilizan las medidas derivadas de la medida básica?

Los autores afirman que “Las fracciones muy simples, tal como 2/3 m, y sobre todo las fracciones “curvas” como 2/11 m, no se pueden expresar en el orden decimal seleccionado, ya que producen números decimales periódicos y continuos.”
Investiga el significado de “decimales periódicos y continuos”. Inventa otras dos fracciones que produzcan decimales periódicos y continuos, y dos más que produzcan decimales que no sean periódicos o no sean continuos.

En al menos dos ocasiones, los autores mencionan que, para trabajos artesanales, no es necesario usar números exactos, sino que basta con encontrar aproximaciones apropiadas.
Alguna vez has tenido que usar números aproximados? Cómo entran los números decimales en estas aproximaciones?

DESAFÍO 6
POBLACIÓN EN LAS ZONAS METROPOLITANAS DE LA REPÚBLICA MEXICANA

Contexto
A continuación te presentamos dos gráficas que muestran información sobre la población en
las Zonas Metropolitanas (ZM) de la República Mexicana. Las zonas metropolitanas son centros urbanos que contienen una ciudad central y otras ciudades contiguas, las cuales pueden ser sitios de trabajo o lugares de residencia de trabajadores, y que mantienen una interrelación socioeconómica directa, constante e intensa con la ciudad central.



Desafío
Para comprender la información en las gráficas, proponemos la siguiente pregunta guía:
¿Cómo se mide la concentración de personas en las zonas metropolitanas?

Principales núcleos de población[3]

3 Fuente: http://www.conagua.gob.mx/CONAGUA07/Publicaciones/Publicaciones/EAM2010-16Junio2010.pdf

M1.2 Principales núcleos de población

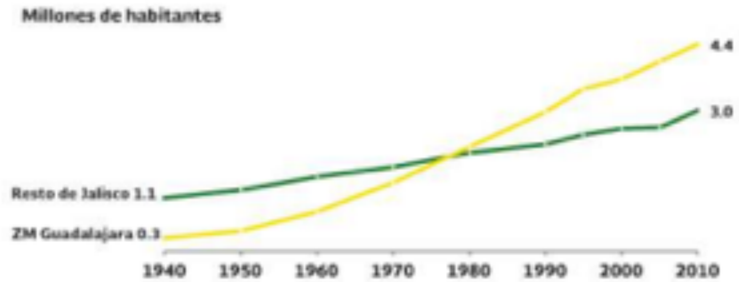
CONAGUA
COMISIÓN NACIONAL DEL AGUA

Nota: Incluye zonas metropolitanas (ZM) y localidades mayores a 500,000 habitantes en municipios no conurbados.
Fuente: Conagua. Subdirección General de Planeación 2013. Elaborado a partir de: INEGI. *Censo General de Población y Vivienda 2010.* Conapo. *Proyección de la población 2010-2050.* Consultado en: http://www.conapo.gob.mx/es/CONAPO/Proyecciones (15/08/2013). Sedesol, Segob, INEGI y Conapo. *Delimitación de las zonas metropolitanas de México 2010.* México 2012.

La concentración y el crecimiento acelerado de la población en las localidades urbanas ha implicado fuertes presiones sobre el medio ambiente y las instituciones, derivadas de la demanda incrementada de servicios. El ejemplo del crecimiento de la Zona Metropolitana de Guadalajara en el periodo 1940-2005 y su proyección al 2010, comparado al del resto del Estado de Jalisco, se presenta en la gráfica G1.4. Se estima que al año 2010, la ZM de Guadalajara representa el 59.6% de la población total del estado.

Conapo estimó que al 2012, en las doce zonas metropolitanas con una población mayor a un millón de habitantes, se concentraba el 37.7% de la población del país, es decir 44.1 millones de habitantes.

G1.4 Evolución de la población de la ZM Guadalajara respecto al resto de Jalisco



Nota: Se muestran los años de Censos y Conteos, estos últimos son 1995 y 2010.
Fuente: Para los valores de población de la ZM Guadalajara 1940-1980: Arroyo Alejandre, Jesús. 1994. *Zona metropolitana de Guadalajara / la transición del crecimiento poblacional*, Demos, No. 007, enero 1994.
Para los valores de población de la ZM Guadalajara 1990 - 2005: Sedesol, INEGI y Conapo. *Delimitación de las zonas metropolitanas de México 2005*. México, 2007.
Para los valores de población del estado de Jalisco en el periodo 1940-2005: Consejo Estatal de Población Jalisco. *Población total y tasa de crecimiento promedio anual, 1895-2005*. 2009.
Para los valores de población de la ZM Guadalajara 2010: Sedesol, Segob, INEGI y Conapo. *Delimitación de las zonas metropolitanas de México 2010*. México 2012.
Para los valores de población del estado de Jalisco 2010: Conapo. *Proyecciones de la población 2010-2050. De las entidades federativas 2010-2030*. Consultado en http://www.conapo.gob.mx/es/CONAPO/De_las_Entidades_Federativas_2010-2050 (15/08/2013)

CONAGUA
COMISIÓN NACIONAL DEL AGUA

Ordena y registra lo que comprendiste

En el texto de la primera gráfica se afirma que “al año 2010, la Zona Metropolitana de Guadalajara representa el 56.9 % de de la población total del estado.” Puedes comprobar esto usando los datos que brinda la segunda gráfica?
Crees que puedes hacer un pronóstico para saber qué porcentaje de la población de Jalisco se concentrará en Guadalajara en el año 2015 y en el año 2020? Cómo podrías comprobar tu pronóstico?
Qué otra información te brindan las gráficas?
Tienes alguien en tu familia que haya emigrado hacia alguna de las zonas metropolitanas mostradas en la gráfica 1? Por qué crees que se haya ido hacia allá?

DESAFÍO 7

APROXIMAR EL NÚMERO PI MEDIANTE FRACCIONES

Contexto

El número pi es un número que aparece cuando se compara la circunferencia de un círculo con su diámetro. Tiene la característica de ser un número irracional, es decir, que no se puede escribir de forma exacta como una fracción.

DESAFÍO

¿CUÁLES APROXIMACIONES PARA PI PRESENTA EL TEXTO, Y CUÁL DE ELLAS ES MÁS EXACTA?

6 THINGS YOU PROBABLY DIDN'T KNOW ABOUT PI[4]

by REHTT ALLAIN

[...]

There are many approximations for Pi

If you have a circle, you can measure two things: the distance around the perimeter of the circle (circumference) and the distance across the widest part of the circle (diameter). No matter how big your circle, the ratio of circumference to diameter is the value of Pi. Pi is an irrational number—you can't write it down as a non-infinite decimal. This means you need an approximate value for Pi.

The simplest approximation for Pi is just 3. Yes, we all know that's incorrect, but it can at least get you started if you want to do something with circles. In the past, many math books listed Pi as 22/7. Again, this is just an approximation but it is better than the value of 3 (actually 22/7 is closer to Pi than just writing 3.14).

The early history of mathematics covers many approximations of the value of Pi. The most common method would be to construct a many-sided polygon and use this to calculate the perimeter and diameter as an estimate for Pi. Other cultures found ways to write Pi as an infinite series—but without a computer, this can be sort of difficult to calculate out very far.

[...]

Revisa tu avance

Se recomienda que al enfrentarte a un desafío leas con atención los propósitos y las orientaciones que vienen en el texto; estas te permitirán sacar provecho al texto y te ayudarán a que asimiles las competencias que pretenden desarrollarse con el estudio de esta Unidad.

Una vez que hayas concluido alguno de los desafíos, será importante que analices en qué punto o puntos del trayecto de aprendizaje fortaleciste el conocimiento, con la finalidad de que en estudios posteriores puedas desarrollar otras habilidades o profundizar en los aspectos que ya trabajaste. Es importante señalar que no todos los desafíos permiten que se desarrollen las mismas habilidades; pero eso también depende del enfoque que se le dé al estudio.

Al revisar el trayecto de aprendizaje, se evidenciará qué aspectos del conocimiento y de la disciplina se han logrado rescatar y en cuáles hace falta ahondar. De la misma manera, saldrá a la vista que las partes que conforman el trayecto no tienen distintos niveles de facilidad o dificultad; sólo son diferentes y te permiten reconocer aspectos diversos de lo que se está estudiando y de lo que se considera elemental que se construya cuando se estudia el texto propuesto.

4 Fuente: https://www.wired.com/2016/03/six-things-probably-didnt-know-pi/