



Formas geométricas

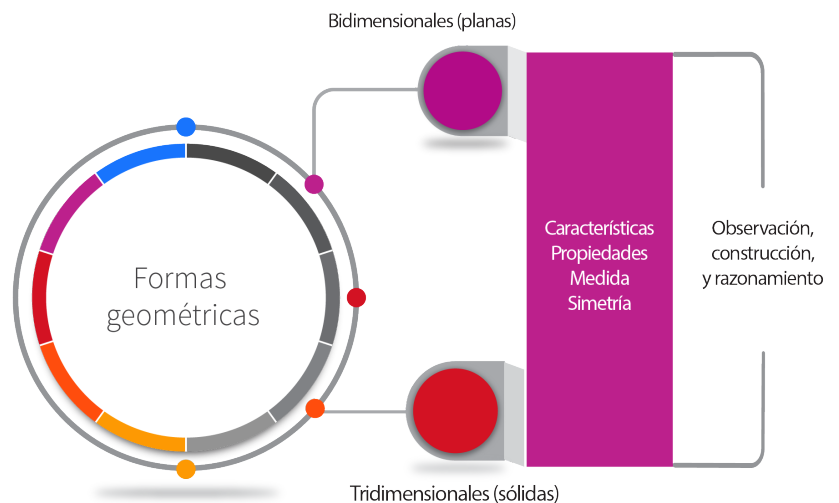
Presentación

En la vida cotidiana usamos objetos que tienen una forma geométrica sencilla—como una mesa rectangular, una cubeta cilíndrica o un lápiz con forma de prisma hexagonal terminado en una punta cónica. En cada uno de estos ejemplos, la forma del objeto parece contribuir en alguna medida a la función que desempeña. No se fabrican lápices cuadrados, por ejemplo, o al menos no son tan populares como los hexagonales. A qué crees que se debe esto?

Además de tener una influencia sobre la función de los objetos que utilizamos cotidianamente, las formas geométricas tienen una aplicación ornamental. Por ejemplo, los platos en los que comemos a menudo tienen decoraciones que los embellecen, lo mismo que algunas prendas de ropa y accesorios como aretes y collares. Instintivamente, los artesanos utilizan nociones geométricas para lograr que sus creaciones se vean más bonitas.

Además de utilizar formas geométricas con fines prácticos y ornamentales, las personas de todos los tiempos y todas las culturas han encontrado fascinante profundizar en la comprensión de las figuras que observan. Esto ha dado lugar a la ciencia de la geometría, la cual estudia propiedades de las formas tales como su medida (área y perímetro), el número de sus elementos (puntos, líneas, caras), su simetría, su clasificación de acuerdo a sus características.

Esquema del tema



Propósito general

Esta Unidad es un acercamiento al estudio de algunos fenómenos geométricos a través de la resolución de problemas y la lectura de textos. Los problemas te invitan a visualizar en tu mente objetos geométricos, y hacer predicciones acerca de ellos. Al mismo tiempo, estás invitado a crear figuras físicamente con materiales como papel o cartón, de forma que puedas comprobar y refinar tus razonamientos e intuiciones. La geometría es al mismo tiempo una habilidad de la mente - puesto que permite la creación de razonamientos y deducciones lógicas - y de las manos - ya que invita a plasmar visualmente las ideas abstractas.

Propósitos específicos

Analizar las características y propiedades de figuras planas y sólidas

Desarrollar razonamientos matemáticos acerca de relaciones geométricas

Apreciar el desarrollo histórico del estudio de la geometría y la contribución que esta ciencia ha hecho a campos del desarrollo humano distintos de las matemáticas

Desafío 1 La familia de los dados

En la Presentación mencionamos que algunos la forma de algunos objetos cotidianos está cercanamente relacionada con su uso. (Encuentra al menos tres ejemplos distintos de los mencionados.) Consideremos otro ejemplo: todos hemos jugado con dados alguna vez. Aunque no tenemos la certeza de ganar--pues de eso se trata un juego de azar-- todos los jugadores confiamos en tener el mismo chance de que “la suerte nos sonría”. En otras palabras, sabemos que todas las caras del dado tienen la misma probabilidad de caer hacia arriba. ¿Cómo sabemos esto?

Después de explorar estas cuestiones introductorias, estás listo para la pregunta central de este desafío:

Además del dado usual, que tiene forma de cubo, ¿existen otras figuras que al lanzarlas al aire tengan la misma probabilidad de caer con cualquier cara hacia arriba (o hacia abajo)?

Una pista: El dado común está formado exclusivamente de cuadrados--seis de ellos. Para encontrar otras figuras que funcionen como dados, quizá sea necesario utilizar figuras distintas del cuadrado. Tendrás que imaginar estos “dados alternativos” en tu mente y construirlos usando cartulina, cartón, papel cascarón o cualquier material que tengas a la mano.

Organiza y registra lo que comprendiste

Para ayudarte en el proceso de construir los “dados alternativos”, considera las siguientes preguntas:

¿Qué características geométricas tiene el dado (es decir, cuántos vértices, cuántas aristas y cuántas caras)?

¿Cuántas caras se unen en cada vértice?

¿Estas características juegan un papel en el hecho de que cada cara tenga la misma probabilidad de caer hacia arriba?

¿Qué otro cuerpo se te ocurre que tenga 6 caras? ¿Ese otro cuerpo serviría como dado?

¿Por qué?

Una vez que hayas encontrado todos los dados que puedas, responde las siguientes preguntas:

¿Qué características tiene cada uno?

¿Qué características comparten todos los dados entre sí, que los diferencian de otras figuras sólidas?

¿Cómo podrías saber que has encontrado todos los dados que existen?

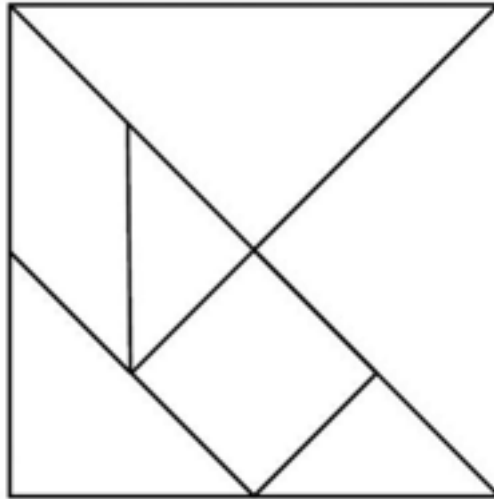
Viendo cada dado como un cuerpo geométrico, ¿qué nombre le pondrías? (Por ejemplo, el dado común se llama cubo o hexaedro.)

Lo que hasta ahora hemos llamado ‘dado’, ¿qué nombre tendrá en geometría?



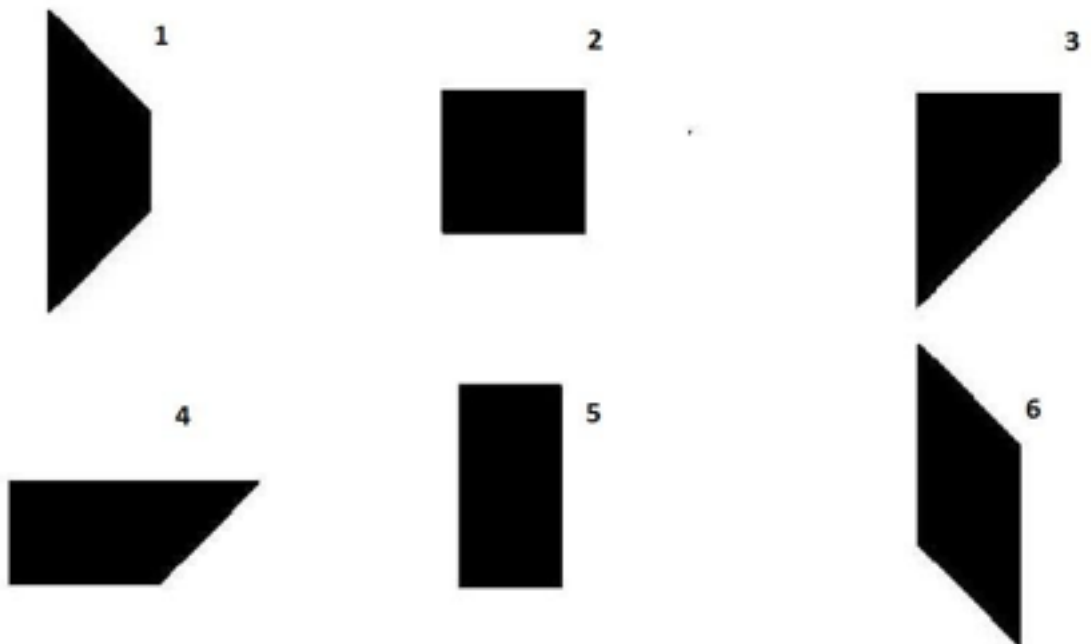
Desafío 2 Los cuadriláteros del tangram

El tangram es un rompecabezas que consta de 7 piezas llamadas tans, las cuales son figuras geométricas simples: cinco triángulos, un cuadrado y un paralelogramo. Usando la plantilla brindada abajo, construye tu juego de tans con papel grueso o cartón. Para jugar con los tans se debe seguir la siguiente regla: usar todos los tans, sin que se traslapen, pegándolos por sus lados. Para familiarizarte con los tans y sus posibilidades de construcción, inventa tus propias figuras—por ejemplo, un barco, un caballo, un papalote, un niño corriendo... La variedad posible es enorme, existen miles de figuras que otras personas han inventado.



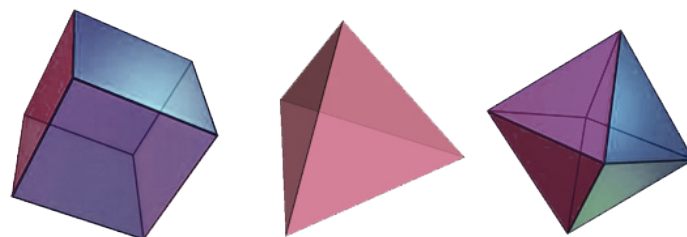
Plantilla del tangram¹

Con el tangram se pueden también formar figuras geométricas sencillas, como el cuadrado, el triángulo isósceles, el paralelogramo, etc. El desafío que te proponemos es el siguiente: ¿Puedes armar todos los cuadriláteros—figuras de cuatro lados—mostrados abajo?



¹ Fuente de la imagen: <https://www.thoughtco.com/tangrams-geometry-worksheet-2312325>

miento se conoce como “truncar”). ¿Cuáles son las características (es decir, el número de caras, aristas y vértices) de cada uno de los cuerpos resultantes?



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Para profundizar y extender tus aprendizajes, considera las siguientes preguntas:

¿Crees que podrías deducir las características de los cuerpos truncos sin construirlos físicamente, sino a partir de considerar las características de los cuerpos originales?

¿Cómo describirías, en general, al efecto que tiene truncar un cuerpo?

Supón que tienes una figura que has obtenido a partir de truncar otra. ¿Crees que la nueva figura pueda truncarse otra vez? ¿Cómo se vería el resultado? ¿Cómo podrías recuperar la figura inicial?

Desafío 5 Dados de la Edad de Piedra

Los dados con los que trabajaste en el desafío 1 (“La familia de los dados”) se conocen en geometría como “sólidos (o poliedros) regulares”. Muchos científicos desde la antigüedad hasta nuestros días han estudiado las propiedades geométricas de los sólidos regulares, tanto por interés teórico como por las aplicaciones que pueden tener. El primero en escribir sobre los poliedros regulares fue el filósofo griego Platón, razón por lo cual también se llaman “sólidos platónicos”. Pero ¿es concebible que, antes de Platón, alguien haya descubierto los sólidos regulares? ¿Cómo podríamos saberlo? En la fotografía de abajo se muestran algunas piedras talladas que han sido encontradas en Escocia y que parecen corresponder con los poliedros regulares. Se estima que estas piedras tienen aproximadamente 4000 años de antigüedad, aproximadamente 1600 años antes de la época en la que vivió Platón.



ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

¿Cuáles figuras te resultaron más difíciles? ¿Por qué?

¿Encontraste alguna estrategia para armar las figuras? Compártelas con tus compañeros.

¿De cuántas maneras diferentes se puede armar cada figura?

¿Puedes encontrar otras figuras de cuatro lados que se pueden armar usando el tangram?

Desafío 3 Una figura con área máxima

En este desafío mediremos dos elementos de las figuras geométricas: su área, que es la superficie encerrada por los lados y se mide en unidades cuadradas (centímetros cuadrados, metros cuadrados, etc.) y su perímetro, que es la longitud del contorno de la figura. Supón que queremos construir un paralelogramo (es decir, una figura con cuatro lados, tales que los pares de lados opuestos son paralelos) de manera que se cumplan las siguientes condiciones: el ancho sea dos terceras partes del largo, su perímetro igual a 30 centímetros y su área sea la más grande posible.

¿Cuáles deben ser las medidas del paralelogramo para cumplir con las tres condiciones?

Puedes realizar dibujos y modelos de cartón o hilo que te ayuden a visualizar la situación.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Describe en tu registro qué propiedades de los paralelogramos utilizaste en tu proceso de solución. Las siguientes preguntas pueden servirte como una guía:

Dibuja o construye varios paralelogramos que cumplan con la primera condición—el ancho es dos terceras partes del largo. ¿Qué características de los paralelogramos pueden todavía variar?

Dibuja o construye varios paralelogramos que cumplan con la segunda condición—el perímetro es 30 centímetros. ¿Qué características de los paralelogramos pueden todavía variar?

Dibuja o construye varios paralelogramos que cumplan con las primeras dos condiciones. ¿Qué características de los paralelogramos pueden todavía variar?

Cuántos paralelogramos existen que cumplen con las tres condiciones? ¿Qué forma tienen?

Desafío 4 Figuras truncas

Para la solución de este desafío puedes apoyarte tanto de tu capacidad de imaginar figuras como de esquemas o construcciones físicas.

En las siguientes figuras se hacen cortes por los puntos medios de las aristas para retirar las esquinas (este procedi-

La cuestión central de este desafío es la siguiente: una fuente en internet con buena reputación afirma que “Adelantándose a Platón, los pueblos neolíticos de Escocia desarrollaron los cinco sólidos mil años antes que él.”²

¿Crees que esta afirmación sea verdadera?

Considera las siguientes preguntas como guía (no es necesario que las contestes todas):

- En la afirmación de la fuente de internet, ¿qué significa “desarrollar” los sólidos? ¿Es lo mismo que construirlos físicamente o implica entenderlos más a fondo?
- ¿Cómo crees que vivía la gente del Neolítico—la última fase de la Edad de Piedra?
- Recordando la forma en que tú construiste los poliedros regulares—los dados—en un desafío anterior, ¿qué conocimientos matemáticos se necesitan para construirlos? ¿Crees que los humanos de la Edad de Piedra hayan tenido esos conocimientos?
- ¿Para qué crees que las personas hayan tallado las piedras esféricas mostradas en las figuras, es decir, para qué servirían esas figuras en la vida de una persona de la Edad de Piedra?
- ¿Qué información adicional necesitarías saber para responder a la pregunta central del desafío?

Una vez que tengas tu respuesta al desafío central, lee el siguiente texto, en el cual el autor presenta su opinión al respecto de la misma pregunta.

Figuras ancestrales (fragmento)³ por Héctor Zenil

Los restos arqueológicos más antiguos que se conocen, en los que aparecen diferentes figuras poliedrales al mismo tiempo, son unas piedras talladas del neolítico (de alrededor del año 2000 a.c.) encontradas en Escocia (véase la Figura 1.2).



Figura 1.2: Nociones geométricas del neolítico. Piedras es-

² Fuente: Weisstein, Eric W. “Platonic Solid.” De MathWorld—Un recurso de Wolfram Web. <http://mathworld.wolfram.com/PlatonicSolid.html>

³ Fuente: Héctor Zenil, 2011, “Lo que cabe en el espacio”, pp. 1-6. <http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/copit/TS0008ES/TS0008ES.pdf>

culpadas encontradas en asentamientos con al menos tres mil años de antigüedad. De un total de 411 piedras registradas en 1977 en el catálogo de Dorothy Marshall que se encuentran en el museo nacional de Escocia en Edimburgo, en el museo Ashmolean de Oxford, y en otros museos esparcidos en distintos lugares de Inglaterra. Foto de H. Zenil, Escocia, 2011.

Estos objetos de naturaleza poliedral son los primeros objetos encontrados de su tipo hechos por el humano. Algunos creen que estas piedras provienen de la cultura Celta tardía, pero no se ha logrado un consenso general. El origen más aceptado es el ubicado en la fecha alrededor del 2000 a.c. o entre la edad de piedra tardía y la edad de bronce, debido a que se han encontrado siempre directamente relacionados con asentamientos escoceses de dicha época. [...]

Un poliedro es un cuerpo sólido limitado por una superficie que consta de un número finito de polígonos a los que se les denomina caras del poliedro. Si las caras de un poliedro son polígonos regulares y en cada vértice concurren un mismo número de ellas, se dice que el poliedro es regular, por ejemplo, en el tetraedro concurren tres triángulos iguales en cada vértice y en el hexaedro o cubo concurren tres cuadrados en cada vértice.

Lo que hace especial a los poliedros regulares, es que después de la esfera a la que sin importar desde dónde se le vea se ve siempre igual (excepto por su tamaño, y sin considerar color, textura, etc.), los poliedros son objetos que, en los mismos términos, bajo transformaciones geométricas preservan su forma. En otras palabras, se ven igual como si transformación alguna hubiera ocurrido.

Aunque la Figura 1.2 muestra objetos que parecen tener cierta afinidad a los poliedros regulares, no hay evidencia concluyente acerca de si los autores de dichos objetos los conocieran, por las siguientes razones:

1. La forma de las piedras no es concluyente. Algunas de ellas parecen ser claramente construcciones poliedrales esféricas ya que los bordes de las mismas no son rectos sino más bien curvos. Sin embargo, la curvatura podría deberse a la restricción debido a la posible falta de herramientas adecuadas para construir bordes más finos y delineados. [...]

El pretendido tetraedro tiene ocho protuberancias circulares, cuatro de ellas grandes y otras cuatro más pequeñas entre las otras cuatro. Probablemente la piedra más polémica pudiera ser la que representa al dodecaedro, entre las diversas piedras encontradas, ya que sus caras son mucho más finas que las anteriores, son claramente pentágonos, la conciencia al esculpir esta piedra debió ser muy clara, su construcción no es trivial ya que los pentágonos muestran cierta regularidad en tamaño y en su número total (doce). Los surcos delinean perfectamente todos los pentágonos. De hecho esta piedra es más bien un poliedro esférico que tiene las propiedades evidentes de un dodecaedro. [...] Sin embargo, es claro que aunque la construcción del dodecae-

dro haya sido intencional, el conocimiento de los poliedros regulares sugiere el conocimiento de hechos mucho más trascendentes que el conocimiento de un solo poliedro regular. El conocimiento de la existencia de los poliedros regulares o sólidos platónicos trae consigo adjunto el conocimiento de la existencia y unicidad de los mismos, incluso probablemente la relación de unos con otros y la metodología para reproducirlos sistemáticamente.

2. Las piedras son una muestra de cientos de piedras encontradas en lugares cercanos con todo tipo de formas geométricas y número de protuberancias colocadas simétricamente. La selección y orden de las piedras presentadas en el que se exhiben es intencional ya que no tenían ningún orden en particular cuando fueron descubiertas. De las 411 piedras 275 contienen seis estructuras circulares o nudos como algunos le llaman. Esta figura pudo haber sido la más fácil de esculpir debido a que el autor tenía que preocuparse sólo por generar puras caras opuestas, lo que evidentemente indica cierto conocimiento geométrico incluso si proviene simplemente de restricciones físicas.

Estas piedras encontradas en Escocia no indican necesariamente que se conocieran los poliedros regulares como objetos geométricos con propiedades particulares (si consideramos que el conocimiento de estos objetos implica que se tiene la conciencia de que no puede haber otros con las mismas características). Sin embargo, son una prueba de las nociones geométricas de la época. Sin duda, su grado de sofisticación indica cierto dominio del espacio y el sometimiento de las formas a las restricciones del espacio. Sin duda, los primeros hombres se habían encontrado con restricciones espaciales cuando manipulaban objetos o figuras (por ejemplo en sus dibujos rupestres) en forma de límites en el número de movimientos posibles de, por ejemplo, un objeto rígido, que queda casi fijo una vez que 2 puntos del mismo se fijan, y queda completamente fijo a un plano con 3 puntos fijos. [...]

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPRENDISTE

Identifica la respuesta del autor a la pregunta del desafío y considera las siguientes preguntas:

Qué evidencia ofrece el autor para sustentar su respuesta?

Te parece que es suficiente?

Teniendo en mente la respuesta que tú propusiste, en qué es similar a la del autor, y en qué es distinta?

Qué otra información crees que necesitarías investigar saber para profundizar en la cuestión del descubrimiento de los poliedros regulares?



Desafío 6 La forma del balón de fútbol

Casi todos los que hemos jugado una cascarita o visto un partido de fútbol conocemos el balón de pentágonos y hexágonos, típicamente coloreados de negro y blanco. La primera vez que este diseño se utilizó en una Copa del Mundo fue en México 1970, y se volvió tan popular que se utilizó en un total de 8 Copas del Mundo—más que ningún otro diseño antes o después. Puedes verificar esto en la siguiente imagen⁴:



A continuación, te presentamos una lectura cuyo tema central es la siguiente pregunta:

¿Por qué alcanzó tanto éxito el balón de pentágonos y hexágonos?

4 Fuente de la imagen: https://www.wooz.eu/media/catalog/product/cache/1/image/9df78eab33525d-08d6e5fb8d27136e95/0/0/000003_more_2.png.

Antes de leer el texto, considera también las siguientes preguntas:

¿Has jugado o visto fútbol?

¿Qué aspectos crees que contribuyen a que un balón sea bueno para jugar? ¿Cómo influye la forma del balón? ¿Cómo el material?

Además del diseño de pentágonos y hexágonos, ¿qué otros diseños conoces?

¿De qué material están hechos los balones que se pueden comprar hoy en día? ¿De qué material crees que estaban hechos los balones en de hace 30 o 40 años—es decir, en la década de los 70s y los 80s?

Building better balls⁵ (fragmento)
por los columnistas de The Economist

Adidas has been making FIFA's World Cup balls for four decades, since it developed the Telstar for the 1970 tournament in Mexico. The Telstar's design became the archetypal, iconic soccer ball: a sphere out of 32 hexagons and pentagons, the roundest ball possible at the time. The Telstar's alternating black and white panels created great visual contrast on the televisions of the day, improving the eye's ability to see and track the ball even when it was only a few pixels on a screen.

The Telstar's large number of leather panels created an aerodynamically uniform surface, which made it fly true when launched. The many hand-stitched seams turned out to be a problem, though. Seams are stiff, and create corners; kicking one produces different results than kicking a panel, and if a player's boot catches a corner at an imperfect angle, it affects the ball's trajectory. The seams' threads also absorb water and provide an entry point for the leather to do the same, making the ball heavier and much less responsive as play continues. Finally, hand-stitching makes each ball different. A typical match uses 8-10 balls, and having a ball's behaviour change multiple times during the game, however subtly, is unhelpful.

The next three decades of World Cup balls offered incremental improvements on the Telstar design. The 32-panel approach proved aerodynamically hard to beat, but leather gave way to various foams and plastics. These were better able to stay curved (making a rounder ball) and absorbed less water along the edges. Ball performance -- how it bounces off of boots, the ground, heads and bodies -- improved all along, as did flight performance.

ORGANIZA Y REGISTRA LO QUE COMPENDISTE

¿Cuántos pentágonos y cuántos hexágonos crees que tiene el balón Telstar? Cómo podrías verificar tu predicción?

(Para los estudiantes que resolvieron previamente el desafío "La familia de los dados") ¿A cuáles de los dados que construiste se parece más el balón? Por qué?

Si consideras el balón como un sólido geométrico, ¿qué nombre le pondrías? Explica tu respuesta.

⁵ Fuente: http://www.economist.com/blogs/babbage/2010/06/world_cup_ball.

Revisa tu avance

Se recomienda que al enfrentarte a un desafío leas con atención los propósitos y las orientaciones que vienen en el texto; estas te permitirán sacar provecho al texto y te ayudarán a que asimiles las competencias que pretenden desarrollarse con el estudio de esta Unidad.

Una vez que hayas concluido alguno de los desafíos, será importante que analices en qué punto o puntos del trayecto de aprendizaje fortaleciste el conocimiento, con la finalidad de que en estudios posteriores puedas desarrollar otras habilidades o profundizar en los aspectos que ya trabajaste. Es importante señalar que no todos los desafíos permiten que se desarrollen las mismas habilidades; pero eso también depende del enfoque que se le dé al estudio.

Al revisar el trayecto de aprendizaje, se evidenciará qué aspectos del conocimiento y de la disciplina se han logrado rescatar y en cuáles hace falta ahondar. De la misma manera, saldrá a la vista que las partes que conforman el trayecto no tienen distintos niveles de facilidad o dificultad; sólo son diferentes y te permiten reconocer aspectos diversos de lo que se está estudiando y de lo que se considera elemental que se construya cuando se estudia el texto propuesto.

Fuente de la imagen: <http://www.pbs.org/wgbh/nova/blogs/physics/2011/12/beautiful-losers-platos-geometry-of-elements/>